Le Théorème de Noether du continu au discret

Jordy Palafox

Travail soutenu par le Projet CPER-FEDER en commun avec
Aziz Hamdouni (LaSIE) et Jacky Cresson (UPPA)
Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE,
UMR - 7356 CNRS

Le Théorème de Noether : des mathématiques à la physique

Au début du 20^{eme}siècle peu après Poincaré, Emmy Noether, une des premières femmes Mathématiciennes reconnues, publie un article fondateur **Invariante Variationsprobleme** en 1918 dans lequel elle s'intéresse aux relations entre lois de conservations et symétries pour des équations différentielles et équations aux dérivées partielles Lagrangiennes.

Pour simplifier l'exposé, on se restreint aux équations différentielles. Considérons une **fonctionnelle Lagrangienne**:

$$\mathscr{L}[x] = \int_a^b L(t, x, \dot{x})dt,$$

où L est la **densité Lagrangienne**, x est un chemin dans $\mathbb{R}^3$ et $\dot{x}$ sa dérivée. Une équation différentielle:

$$\Delta(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0.$$

dérive d'une action Lagrangienne ou est dite **Lagrangienne** s'il existe une fonction $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\Delta = E(L) = \frac{\partial}{\partial x}L(t, x, v) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v}L(t, x, v)\right) = 0,$$

qui sont les **équations d'Euler-Lagrange** dont les solutions sont les points critiques de la fonctionnelle Lagrangienne $\mathscr{L}$.

Soit G un groupe de symétries de Lie laissant **invariant** l'action Lagrangienne, c'est-à-dire:

$$\mathscr{L}[g \cdot x] = \mathscr{L}[x], \forall g \in G.$$

Pour un groupe de symétries à un paramètre, en considérant ses **générateurs infinitésimaux** $v = \xi(t, x)\partial_t + \phi(t, x)\partial_x$, la condition d'invariance s'écrit:

$$pr^{(n)}v(L) + L\frac{d}{dt}(\xi) = \frac{d}{dt}(B),$$

où $pr^{(n)}v$ est l'action prolongée du générateur infinitésimal aux dérivées de x.

Une **loi de conservation** (ou **intégrale première** dans le cas des équations différentielles) est une fonction P qui dépend de la variable temporelle t et de la variable dépendante spatiale x et ses dérivées qui est **constante sur les solutions** de $\Delta = 0$, autrement dit:

$$\frac{d}{dt}(P)(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Le résultat fondamental d'E.Noether est que pour un groupe de symétries à un paramètre correspond une loi de conservation. Une version simplifiée de ce résultat est:

Théorème de Noether simplifié

Supposons qu'il existe un groupe de symétries du problème variationnel donné par $\mathscr{L}$ dont le générateur infinitésimal est $v = \xi(t, x)\partial_t + \phi(t, x)\partial_x$. Alors il existe une intégrale première:

$$P = B - \xi L - \sum_i (\phi - \xi\dot{x})_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Cependant, pour le problème de Kepler on a une intégrale première (le **vecteur de Lenz**) qui n'est associée à aucune symétrie classique. Ce cas est traité par la réciproque énoncée par E.Noether, c'est le théorème de Noether généralisé où on considère les **symétries généralisées.**

Symétries généralisées, l'exemple du problème de Kepler

Pour démontrer la réciproque , il faut considérer des symétries dont les coefficients vont dépendre de t, x et de la vitesse $\dot{x}$:

$$v = \xi(t, x, \dot{x})\partial_t + \phi(t, x, \dot{x})\partial_x.$$

La clé est d'utiliser son **représentant vertical**:

$$v_Q = Q[t, x, \dot{x}]\partial_x,$$

avec $Q[t, x, \dot{x}] = \phi - \xi\dot{x}$ dont l'action est restreinte aux variables d'espace. En exprimant les propriétés d'invariance et l'intégration par parties avec la dérivée de Fréchet, on peut démontrer que Q est une **caractéristique d'une loi de conservation** i.e. $\frac{dP}{dt} = Q \cdot E(L)$.

Illustrons ces différents types de symétries pour le **problème de Kepler** modélisé par l'équation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nu\frac{x}{|x|^3}$$

Elle dérive du Lagrangien $L = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \frac{\nu}{|x|}$.

On démontre qu'il existe deux intégrales premières associées à des symétries classiques, l'**énergie mécanique** E et l'**énergie mécanique** ℓ :

$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}| - \frac{\nu}{|x|} \longrightarrow X = \partial_t,$$

$$\ell = x \times \dot{x} \longrightarrow Y,$$

dont la première composante est $Y_1 = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}$.

Le **vecteur de Lenz** $e = \dot{x} \times (x \times \dot{x}) + \nu\frac{x}{|x|}$ est associé à une symétrie généralisée Z dont la première composante est $Z_1 = (x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3)\partial_{x_1} + (\dot{x}_1x_2 - 2x_1\dot{x}_2)\partial_{x_2} + (\dot{x}_1x_3 - 2x_1\dot{x}_3)\partial_{x_3}$.

Les autres composantes de Y et Z sont obtenues par permutation circulaire des coordonnées.

Les **intégrateurs variationnels**, c'est-à-dire des schémas numériques qui préservent ces structures Lagrangiennes, sont source de nombreux travaux récents. Mais comment peut-on alors construire des intégrateurs variationnels qui préservent aussi les symétries généralisées? La clé est d'établir un théorème de Noether généralisé discret!

Du continu au discret: le time-scale

Le **calcul time-scale** introduit par S.Hilger dans les années 90 a pour but de donner un moyen pratique de jongler entre le calcul continu, discret et même les deux! Pour cela, on définit des opérations qui miment ce que l'on fait en continu. Considérons $\mathbb{T}$ un time-scale i.e un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, $a = min(\mathbb{T})$, $b = max(\mathbb{T})$ et $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

On définit alors:

- un opérateur qui permet de dériver des fonctions discrètes $X : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$:
$$\Delta X = \frac{X_{n+1} - X_n}{h} \text{ ou } \nabla X = \frac{X_n - X_{n-1}}{h},$$
correspondant à la dérivée à droite ou à gauche, vérifiant $\frac{d^2}{dt^2} = \nabla \circ \Delta = \Delta \circ \nabla$,
- un opérateur d'intégration, inverse de la dérivée,
$$J_\Delta(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1} - t_i)X_i, \quad t_i \in \mathbb{T}.$$
On peut définir alors $J_\nabla(X)$ de la même manière.

Considérons alors une fonctionnelle time-scale:

$$\mathscr{L}[x] = J_\Delta L(t, x(t), \Delta x(t)),$$

dont les points critiques sont solutions des équations d'Euler-Lagrange time-scale:

$$\nabla\left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x, \Delta x)\right) = \nabla\sigma(t)\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \Delta x)),$$

où $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\}$. Dans [1], les auteurs démontrent une version du théorème de Noether en time-scale:

Noether time-scale

Soit G un groupe de symétries à un paramètre ε de $\mathscr{L}$ de générateur inf. $X = \xi(t)\partial_t + \phi(x)\partial_x$. Alors, la fonction:

$$\begin{aligned} I(t, x) =& \xi^\sigma[L - \partial_v.\Delta x] + \phi^\sigma.\partial_v L \\ &+ J_\Delta\left(\xi[\nabla\sigma\partial_t L - \nabla(L - \partial_v L\Delta x)]\right) \end{aligned}$$

est une intégrale première.

Stratégie pour un théorème de Noether généralisé en time-scale

Dans le problème de Kepler, la transformation de Legendre est inversible. On peut considérer alors la **formulation Hamiltonienne**.

Dans ce cas là, les transformations de l'espace des phases prennent naturellement en compte les vitesses.

- Formulation Hamiltonienne de Noether:
Soit $H : TQ^* \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien invariant par l'action d'un groupe de symétrie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'application moment associée $J_H : T^*Q \to \mathfrak{g}$ est une quantité conservée par le flot φ de H, i.e. $J_H \circ \varphi = J_H$.
- On doit exprimer la condition d'invariance pour la fonctionnelle: $$\int_a^b p(t)\dot{q}(t) - H(t, q(t), p(t))dt.$$
- Une fois cela fait, on suivra la stratégie de [1] pour obtenir une version time-scale de Noether généralisé pour Kepler.

B.Anerot, J.Cresson, F.Pierret, *A time scales Noether's Theorem*, arXiv, 1609.02698, 12 pages, 2016.
Y.Kosmann-Schwarzbach, *Les Théorèmes de Noether, Invariance et lois de conservation au XX^e siècle, Ed. Polytechnique, Deuxième Ed., 2006.*
P.J.Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Second Edition, Springer, 1998.